

Maturité gymnasiale

Session 2017

## EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

### OS non scientifiques

- 
- temps à disposition : 4 heures
  - note maximale (6) pour 4 problèmes justes
  - extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
  - machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée
- 

#### Problème 1. Étude de fonction

Étudier, y compris la dérivée seconde, puis représenter (unité : 5 mm) la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{(x - 1)^2}.$$

#### Problème 2. Probabilités

Dans un grand magasin, chaque tranche de CHF 20,- d'achats donne droit à un emballage contenant un emoji (une figurine en caoutchouc) parmi 24 différents. Entre autres, il y a "popo", "bouh", "lapinou" et "lol". Chaque emoji a toujours une probabilité de  $\frac{1}{24}$  de se trouver dans un emballage.

- Lors d'un achat, la fille Mouton reçoit un emballage.
  - Calculer la probabilité que l'emballage contienne lapinou ou popo.
  - Elle possède déjà dix emoji différents. Calculer la probabilité que l'emballage en contienne un qu'elle n'a pas.
- Le père Mouton reçoit, lors d'un autre achat, cinq emballages. Il les ouvre l'un après l'autre.
  - Calculer la probabilité que le premier et le dernier emballages ouverts contiennent popo.
  - Calculer la probabilité qu'il obtienne popo exactement deux fois.
  - Calculer la probabilité qu'il obtienne exactement deux fois popo et exactement deux fois bouh.
  - Calculer la probabilité qu'il obtienne exactement deux fois popo ou exactement deux fois bouh.
  - Calculer la probabilité qu'il obtienne exactement : une fois popo, une fois bouh, une fois lapinou et une fois lol.
  - Calculer la probabilité qu'il obtienne cinq emoji différents.
- La mère Mouton possède quinze emoji différents. Calculer le nombre minimal d'emballages à ouvrir pour qu'elle soit sûre à plus de 99% d'obtenir au moins un emoji différent de ceux qu'elle possède.
- Le fils Mouton possède treize emoji différents. Il essaie de sentir au travers de l'emballage reçu la forme de l'emoji. S'il pense qu'il aura un nouvel emoji, il ouvre l'emballage. Or, il se trompe et n'ouvre pas les emballages contenant un nouvel emoji 1 fois sur 5. De plus, il ouvre 1 fois sur 4 les emballages contenant un emoji qu'il possède déjà.
  - Il reçoit un emballage. Calculer la probabilité qu'il l'ouvre.
  - Calculer la probabilité qu'il obtienne un nouvel emoji sachant qu'il a ouvert l'emballage reçu.

### Problème 3. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé d'origine  $O$ , on donne les points  $A(-4; 3; 4)$ ,  $B(0; 5; 4)$  et  $C(-2; 4; 0)$ . On

considère aussi la droite  $d : \begin{cases} x = -12 + 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ .

- Déterminer l'équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
- Montrer que la droite  $(OC)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .
- Montrer que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $C$ .
- Déterminer une équation de la sphère  $\Sigma$  de centre  $O$  et passant par le point  $A$ .
- Calculer les coordonnées du point d'intersection entre la sphère  $\Sigma$  et la droite  $d$ , dont la première coordonnée est un nombre entier.
- Calculer l'angle aigu que forment la droite  $d$  et le plan tangent à la sphère  $\Sigma$  en  $A$ .

On considère encore le cercle  $\Gamma$  d'intersection entre la sphère  $\Sigma$  et le plan  $(ABC)$ .

- Montrer que les points  $A$  et  $B$  sont sur le cercle  $\Gamma$  et que le point  $C$  en est son centre.
- Calculer la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$  du cercle  $\Gamma$ .
- Déterminer les équations paramétriques de la droite  $t$  tangente en  $A$  à la sphère  $\Sigma$  et incluse dans le plan  $(ABC)$ .

### Problème 4. Analyse

Les 3 parties de cet exercice sont indépendantes.

- Soit les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies par  $f(x) = \ln(3x)$ ,  $g(x) = \ln(5x - 4)$  et  $h(x) = \frac{\ln(5x - 4)}{-x^2 + 4x - 3}$ .
  - Montrer que le point  $A(2; \ln(6))$  appartient aux courbes d'équations  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  et  $y = h(x)$ .
  - Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation  $y = f(x)$  au point  $A$ .
  - Calculer l'angle aigu d'intersection des courbes représentatives de  $f$  et  $g$  au point  $A$ .
  - Déterminer le domaine de définition de la fonction  $h$ .
  - Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ .

2. Calculer  $\int (2x + 5)e^{-x} dx$ .

- Un maraîcher désire construire une serre dont l'armature sera composée de quatre arcs en forme de demi-cercle de rayon  $x$  et de quatre barres horizontales de longueur  $y$ , selon le dessin ci-dessous.

Pour réaliser la construction de cette armature, il dispose de 120 m de tubes métalliques.

- Montrer que le volume  $V$  de la serre est donné en fonction de  $x$  par

$$V(x) = \frac{\pi x^2}{2}(30 - \pi x).$$

- Déterminer les dimensions  $x$  et  $y$  pour que le volume de la serre soit maximal.

