CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy
t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2016**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS Physique - Applications des mathématiques

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 5 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

Problème 1 Étude d'une courbe paramétrée

Étudier, puis représenter (unité : 2 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = 2 \cdot \frac{\ln(t+3)+1}{t+3} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t-1}{t^2+3t} .$$

Problème 2 Algèbre linéaire

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

1. Déterminer le noyau de h, puis montrer que l'endomorphisme h est bijectif.
2. Montrer que le vecteur $v = (1; 1; 1)$ est un vecteur propre de h.
3. Calculer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
4. Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer la matrice diagonale D de h relativement à cette base.
5. Donner l'expression de D^n, pour n un nombre entier.
6. Soient les matrices $A = M - a \cdot I_3$ et $B = M - b \cdot I_3$ où a et b sont des nombres réels et I_3 la matrice unité d'ordre 3.
   a) Déterminer la matrice $N = A \cdot B$.
   b) Déterminer les valeurs de a et b telles que $N = O$, où O est la matrice nulle d'ordre 3.
   c) Déduire l'expression de M^2 de l'égalité $N = (M - a \cdot I_3) \cdot (M - b \cdot I_3) = O$.

Problème 3 Géométrie

Un architecte doit concevoir une maison en forme de cube. Il réalise le plan de la maison en faisant en sorte que toutes les coordonnées soient positives. Dans un repère orthonormé, il dessine six points : $A(6; 0; 0)$, $B(0; 8; 0)$, $C(8; 14; 0)$, $E(6; 0; 10)$, $F(0; 8; 10)$ et $G(8; 14; 10)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
2. Calculer les coordonnées du point D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré. Ce carré constitue le sol de la maison.
3. Donner les coordonnées du point H pour que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.
4. L'architecte prévoit finalement d'ajouter un toit en forme de pyramide régulière de base $EFGH$ et de sommet T. Il souhaite que ce sommet ait une cote égale au double de son abscisse. Calculer les coordonnées du point T.
5. Calculer l'aire totale du toit.
6. Déterminer l'équation de la sphère Σ qui est tangente à la droite (OH) au point d'abscisse 7 de cette droite et dont le centre appartient à la droite verticale passant par le point $K(8; 4; 0)$.
7. L'architecte désire construire une fenêtre ayant la forme d'un disque dans la façade $ADHE$. Calculer le centre et le rayon de cette fenêtre s'il choisit d'utiliser pour sa construction le cercle d'intersection entre Σ et la façade $ADHE$.

Problème 4 Probabilités

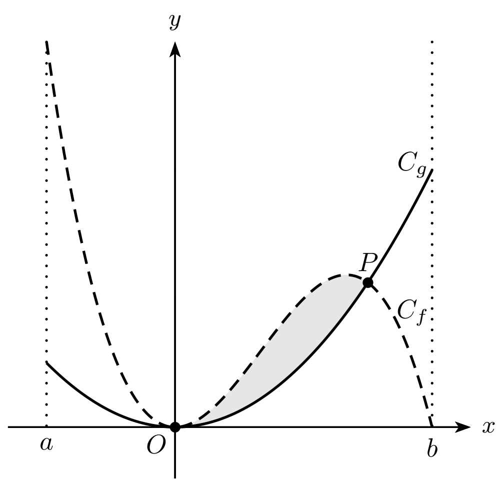
Monsieur Mouton, lorsqu'il se rend à la bibliothèque, emprunte toujours 4 bandes dessinées, 7 romans, 2 pièces de théâtre et 1 livre de philosophie.

1. Il y a quelques années, il a décidé d'emporter un peu de lecture pour partir en vacances. Il a choisi de prendre au hasard 5 livres parmi les 14 livres qu'il venait d'emprunter à la bibliothèque.
   a) Montrer que la probabilité qu'il prenne le livre de philosophie vaut $p = \dfrac{5}{14}$.
   b) Calculer la probabilité des événements suivants.
      A **:** Il prend au moins une bande dessinée.
      B **:** Il prend le livre de philosophie et au moins une pièce de théâtre.
      C **:** Il prend le livre de philosophie ou les 2 pièces de théâtre.
2. Cette manière de procéder (prendre 5 livres parmi les 14 livres empruntés) l'ayant convaincu, il a décidé de faire ainsi pendant 3 ans de suite.
   a) Calculer la probabilité des événements suivants.
      D **:** Il prend le livre de philosophie la première année, pas de livre de philosophie la deuxième année et le livre de philosophie la troisième année.
      E **:** Il prend exactement 2 livres de philosophie.
   b) Combien de livres de philosophie peut-il espérer prendre durant ces 3 ans ?
3. S'il décide de procéder ainsi pendant 28 ans, estimer la probabilité que, durant cette période, il prenne avec lui entre 8 et 14 livres de philosophie (bornes comprises).
4. Monsieur Mouton part en vacances 2 années sur 3 à la montagne et 1 année sur 3 à la mer. Or, il a constaté que, quand il part à la montagne, il ne lit que 3 des 5 ouvrages qu'il prend avec lui. Par contre, il lit tous ces ouvrages quand il part à la mer.
   a) Calculer la probabilité qu'il ait lu un livre de philosophie cette année.
   b) Calculer la probabilité qu'il soit parti à la montagne cette année sachant qu'il a lu un livre de philosophie.

Problème 5 Analyse

Partie 1

Soient les fonctions $f(x) = -x^3 + 2x^2$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$ dont les représentations graphiques sont esquissées ci-contre sur l'intervalle $[a; b]$.



1. Calculer les valeurs des extrémités de l'intervalle $[a; b]$ sachant que $f(b) = 0$ et $g(a) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer l'angle aigu entre les deux courbes au point P.
3. Calculer l'aire du domaine grisé.
4. Soit la fonction d'équation $h(x) = \sin(2x+c)+d$. Déterminer des valeurs possibles pour c et d afin que sa courbe représentative soit tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$.
5. Soient A un point de la courbe C_f, situé entre O et P, et B un point de la courbe C_g de même abscisse que A. Quelles sont les coordonnées du point A pour lesquelles l'aire du triangle OAB est maximale ?

Partie 2

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(1 - x)y' + 2y = x(x - 1)^3 e^x$.