JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2015**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS Biologie - Chimie

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 5 problèmes justes
Fascicule "Extrait des formulaires et tables" à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude d'une fonction

Étudier (sans la dérivée seconde), puis représenter (unité : 2 cm) la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}\,.$$

Problème 2. Équation différentielle et volume de révolution

A. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $xy' - 2y = x^4 \cos(x)$.

B. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 17$ et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de la fonction $y = \dfrac{4}{x}$.

1. Dans le premier quadrant, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.
2. Soit D le domaine borné délimité par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ dans le premier quadrant. Justifier que le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de Oy est le même que celui obtenu en faisant tourner D autour de Ox, puis calculer ce volume.

Problème 3. Algèbre linéaire

Soit l'ensemble des endomorphismes h_α de $\mathbf{R}^2$ donnés par leur matrice $H_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ \alpha & 9 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, relativement à la base canonique.

1. Pour quelles valeurs de α la matrice H_α est-elle inversible ?
2. Montrer que l'endomorphisme h_α est diagonalisable pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.
3. Posons $\alpha = 6$ et notons H la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ et h l'endomorphisme correspondant. Calculer ses valeurs propres ainsi que les espaces propres associés.
4. Déterminer une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme h est diagonale. On notera cette matrice K.
5. Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme h.
6. Donner l'expression de K^n.
7. À l'aide d'un changement de base adéquat, déterminer l'expression de H^n.

Suite au verso

Problème 4. Probabilités

Pour sa session d'examens oraux, un professeur de mathématiques a mis au point le protocole suivant. Il a préparé 36 sujets différents divisés en 3 chapitres : analyse (20 sujets), géométrie (12 sujets) et probabilités (4 sujets). Chaque sujet est noté sur une carte. Lors d'un examen oral, un candidat tire une carte au hasard et est interrogé sur le sujet inscrit sur la carte. L'enseignant remet ensuite cette carte avec les autres cartes. Ainsi, chaque candidat tire une carte parmi 36.

1. Calculer la probabilité que le premier candidat tire un sujet d'analyse.
2. Justin, un des candidats, estime ses chances de réussite à cet oral selon les probabilités suivantes : 1/2 si c'est un sujet d'analyse, 3/4 si c'est un sujet de géométrie, et 1/5 si c'est un sujet de probabilités.
   (a) Calculer la probabilité que Justin réussisse cet examen.
   (b) Calculer la probabilité que Justin ait eu un sujet de géométrie sachant qu'il a réussi.
3. Cette année, cet enseignant a une classe de 22 élèves. Calculer la probabilité qu'à la fin de la session,
   (a) il y ait eu exactement 5 sujets de probabilités ;
   (b) il y ait eu au moins 2 sujets de probabilités ;
   (c) il y ait eu 14 sujets d'analyse, 6 sujets de géométrie, et 2 sujets de probabilités ;
   (d) il y ait eu exactement un seul chapitre examiné ;
   (e) il y ait eu exactement 15 sujets d'analyse tous consécutifs ;
   (f) il y ait eu 22 sujets différents tirés.
4. Cet enseignant préfère les sujets de probabilités. Calculer le nombre minimum d'élèves qui doivent passer un oral avec lui pour que la probabilité d'avoir eu au moins un sujet de probabilités soit supérieure à 99%.
5. Xavier estime sa note ainsi : 5 si c'est un sujet d'analyse, 3 si c'est un sujet de géométrie et 4 si c'est un sujet de probabilités. Calculer la note qu'il peut espérer.

Problème 5. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les trois points $A(4;-2;-4)$, $B(4;-5;17)$ et $C(9;-5;-8)$ ainsi que la sphère Σ d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2+2x-2y-448=0$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et C.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère Σ et son rayon r.
3. Montrer que le point $T(14;-8;-12)$ appartient à la sphère Σ et que les points A, Ω et T sont alignés.
4. Déterminer l'équation cartésienne du plan p tangent à la sphère en T.
5. Déterminer l'angle aigu d'intersection entre les droites (AB) et (AC).
6. Déterminer les coordonnées du point D de la droite (AB) équidistant des points A et C.
7. Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles au plan p tels que les cercles d'intersection entre ces plans et la sphère Σ aient des rayons égaux à $5\sqrt{10}$.