CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy
t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2016**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS Biologie - Chimie

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 5 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

Problème 1 Étude de fonction

Étudier, y compris la dérivée seconde, puis représenter (unité : 2 cm) la fonction f donnée par

$$f(x) = (4x^2 - 2x)\, e^{2x}.$$

Problème 2 Algèbre linéaire

Soient h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique.

1. Montrer que le vecteur v est un vecteur propre de h.
2. Calculer les valeurs propres de l'endomorphisme h et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer la matrice diagonale D de h relativement à cette base.
4. Donner l'expression de D^n, pour n un nombre entier.
5. Soient les matrices $A = M - a \cdot I_3$ et $B = M - b \cdot I_3$ où a et b sont des nombres réels et I_3 la matrice unité d'ordre 3.
   a) Déterminer la matrice $N = A \cdot B$.
   b) Déterminer les valeurs de a et b telles que $N = O$, où O est la matrice nulle d'ordre 3.
   c) Déduire l'expression de M^2 de l'égalité $N = (M - a \cdot I_3) \cdot (M - b \cdot I_3) = O$.

Problème 3 Géométrie

Un architecte doit concevoir une maison en forme de cube. Il réalise le plan de la maison en faisant en sorte que toutes les coordonnées soient positives.Dans un repère orthonormé, il dessine six points : $A(6; 0; 0)$, $B(0; 8; 0)$, $C(8; 14; 0)$, $E(6; 0; 10)$, $F(0; 8; 10)$ et $G(8; 14; 10)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
2. Calculer les coordonnées du point D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré. Ce carré constitue le sol de la maison.
3. Donner les coordonnées du point H pour que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.
4. Déterminer l'équation de la sphère Σ circonscrite à ce cube.
5. L'architecte prévoit finalement d'ajouter un toit en forme de pyramide régulière de base $EFGH$ dont le sommet T se trouvera sur la sphère Σ. Calculer les coordonnées du point T.

Pour simplifier ses calculs futurs, l'architecte choisit pour sommet du toit le point $S(7; 7; 14)$ à la place du point T.

6. Calculer le volume total de la maison.
7. Une cheminée cylindrique doit traverser verticalement la maison. L'axe de la cheminée doit sortir du toit au point $L(5; 5.5; z_L)$. Calculer la cote z_L.

Problème 4 Probabilités

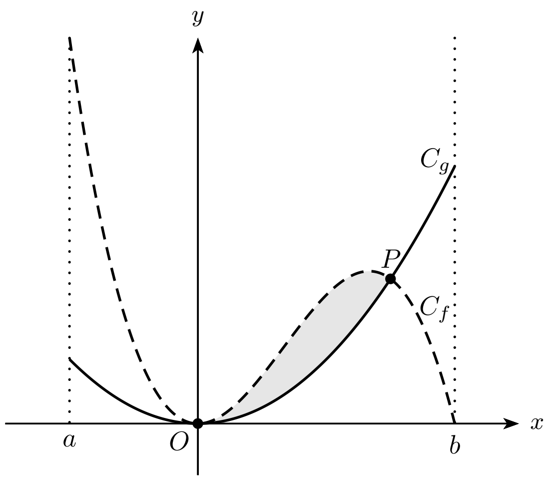
Monsieur Mouton, lorsqu'il se rend à la bibliothèque, emprunte toujours 4 bandes dessinées, 7 romans, 2 pièces de théâtre et 1 livre de philosophie.

1. Il y a quelques années, il a décidé d'emporter un peu de lecture pour partir en vacances. Il a choisi de prendre au hasard 5 livres parmi les 14 livres qu'il venait d'emprunter à la bibliothèque.
   a) Montrer que la probabilité qu'il prenne le livre de philosophie vaut $p = \dfrac{5}{14}$.
   b) Calculer la probabilité des événements suivants.
      A **:** Il prend au moins une bande dessinée.
      B **:** Il prend le livre de philosophie et au moins une pièce de théâtre.
      C **:** Il prend le livre de philosophie ou les 2 pièces de théâtre.
      D **:** Il prend le livre de philosophie sachant qu'il a pris exactement deux romans.
2. Cette manière de procéder (prendre 5 livres parmi les 14 livres empruntés) l'ayant convaincu, il a décidé de faire ainsi pendant 3 ans de suite. Calculer la probabilité des événements suivants.
   E **:** Il prend le livre de philosophie la première année, pas de livre de philosophie la deuxième année et le livre de philosophie la troisième année.
   F **:** Il prend exactement 2 livres de philosophie.
   G **:** Il prend exactement 13 romans.
3. S'il décide de procéder ainsi pendant 28 ans, estimer la probabilité que, durant cette période, il prenne avec lui entre 8 et 14 livres de philosophie (bornes comprises).

Problème 5 Analyse

Partie 1

Soient les fonctions $f(x) = -x^3 + 2x^2$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$ dont les représentations graphiques sont esquissées ci-contre sur l'intervalle $[a;b]$.



1. Calculer les valeurs des extrémités de l'intervalle $[a;b]$ sachant que $f(b) = 0$ et $g(a) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point P.
3. Déterminer l'angle aigu entre les deux courbes au point P.
4. Calculer l'aire du domaine grisé.
5. Démontrer que les courbes C_f et C_g sont tangentes au point d'abscisse $x_0 = 0$.
6. Déterminer la plus grande distance verticale entre les deux courbes dans le domaine grisé.

Partie 2

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(1-x)y' + 2y = x(x-1)^3 e^x$.