CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

**Maturité gymnasiale** **Session 2015**

# EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

**OS non scientifiques**

---

*Temps à disposition : 4 heures*
*Note maximale (6) pour 4 problèmes justes*
*Fascicule "Extrait des formulaires et tables" à disposition*
*Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée*

---

## Problème 1. Étude de fonction

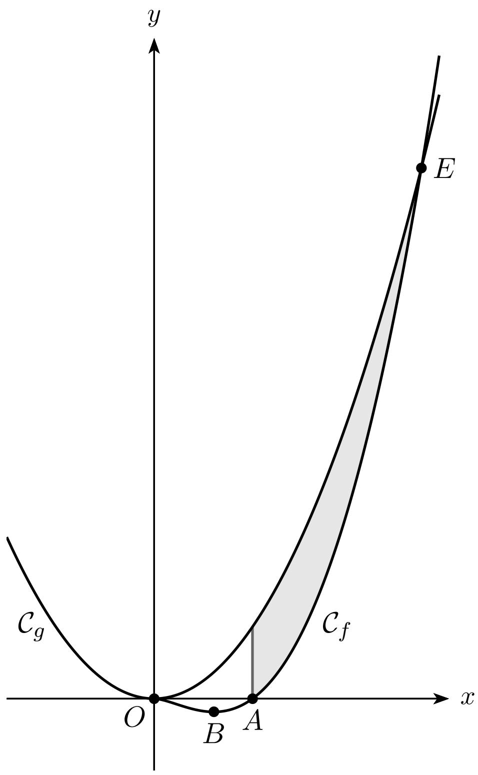
On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$.

1. Étudier complètement la fonction $f$.
   Au cours de l'étude, on montrera que $f''(x) = \dfrac{54(x+1)}{(x-2)^4}$.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection du graphe de $f$ avec l'asymptote non verticale.
3. Représenter graphiquement la fonction $f$. Unité : 5 mm.

## Problème 2. Analyse

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = x^2 \ln(x)$ et $g(x) = x^2$, et dont les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont esquissés ci-dessous.

1. Calculer le domaine de définition de $f$ ainsi que les limites en ses bornes.
2. Calculer les coordonnées du point $B$, minimum du graphe de $f$.
3. Calculer les coordonnées des points
   (a) $A$, intersection du graphe de $f$ et de l'axe des abscisses ;
   (b) $E$, intersection des graphes de $f$ et de $g$.
4. Calculer l'angle aigu que font les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point $E$.
5. Calculer la valeur de $x > 0$ pour laquelle les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont parallèles.
6. Calculer l'aire de la surface grisée.
7. Soit un point $D$ d'abscisse $x$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ compris entre les points $A$ et $E$. Soit également le point $F$ de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse que $D$. Calculer $x$ pour que l'aire du triangle $FOD$ soit maximale.




(suite au verso)

**Problème 3. Probabilités**

Pour sa session d'examens oraux, un professeur de mathématiques a mis au point le protocole suivant. Il a préparé 36 sujets différents divisés en 3 chapitres : analyse (20 sujets), géométrie (12 sujets) et probabilités (4 sujets). Chaque sujet est noté sur une carte. Lors d'un examen oral, un candidat tire une carte au hasard et est interrogé sur le sujet inscrit sur la carte. L'enseignant remet ensuite cette carte avec les autres cartes. Ainsi, chaque candidat tire une carte parmi 36.

1. Calculer la probabilité que le premier candidat tire un sujet d'analyse.
2. Justin, un des candidats, estime ses chances de réussite à cet oral selon les probabilités suivantes : $1/2$ si c'est un sujet d'analyse, $3/4$ si c'est un sujet de géométrie, et $1/5$ si c'est un sujet de probabilités.
   (a) Calculer la probabilité que Justin réussisse cet examen.
   (b) Calculer la probabilité que Justin ait eu un sujet de géométrie sachant qu'il a réussi.
3. Cette année, cet enseignant a une classe de 22 élèves. Calculer la probabilité qu'à la fin de la session,
   (a) il y ait eu exactement 5 sujets de probabilités ;
   (b) il y ait eu au moins 2 sujets de probabilités ;
   (c) il y ait eu exactement 14 sujets d'analyse, 6 sujets de géométrie et 2 sujets de probabilités ;
   (d) il y ait eu exactement un seul chapitre examiné ;
   (e) il y ait eu exactement 15 sujets d'analyse, tous consécutifs ;
   (f) il y ait eu 22 sujets différents tirés.
4. Cet enseignant préfère les sujets de probabilités. Calculer le nombre minimum d'élèves qui doivent passer un oral avec lui pour que la probabilité d'avoir eu au moins un sujet de probabilités soit supérieure à 99%.

**Problème 4. Géométrie dans l'espace**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(4; -2; -4)$, $B(4; -5; 17)$ et $C(9; -5; -8)$ ainsi que la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 448 = 0$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan $(ABC)$.
2. Déterminer les coordonnées du centre $\Omega$ de la sphère $\Sigma$ ainsi que son rayon $r$.
3. Montrer que le point $T(14; -8; -12)$ est sur la sphère $\Sigma$, puis que les points $A$, $T$ et $\Omega$ sont alignés.
4. Déterminer l'équation cartésienne du plan $p$ tangent à la sphère $\Sigma$ au point $T$.
5. Déterminer l'angle aigu d'intersection entre les droites $(AB)$ et $(AC)$.
6. Déterminer les coordonnées du point $D$ situé sur la droite $(AB)$ équidistant des points $A$ et $C$.
7. Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles au plan $p$ tels que les cercles d'intersection entre ces plans et la sphère $\Sigma$ aient des rayons égaux à $5\sqrt{10}$.