JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF

DIVISION LYCÉENNE

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Examen final de l'Option Complémentaire

Applications des Mathématiques

Matériel autorisé : calculatrice non programmable, non graphique ; chapitre 5 du cours.

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1. Calculer les 5 premiers termes (valeurs exactes) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vous semble-t-elle converger ?
2. Montrer par récurrence que si $u_n \in [0;2]$, alors $u_{n+1} \in [0;2]$.
3. Résoudre $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$.
4. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
5. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   L'objectif est maintenant de déterminer cette limite.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2|.$$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|u_n - 2| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|.$$
9. En conclure la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* * * * * * *

Exercice 2 Variables aléatoires

Un élève se rend à vélo au lycée, distant de 3 km de son domicile, à une vitesse supposée constante $v = 15$ km.h^{-1}. Il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est de $\frac{2}{3}$. Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours, et T la variable aléatoire égale au temps mis en minute par l'élève pour aller au lycée.

1. Déterminer la loi de X.
2. Exprimer T en fonction de X.
3. Déterminer l'espérance de T, et interpréter ce résultat.
4. L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   (a) Peut-il espérer être à l'heure ? Justifier.
   (b) Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

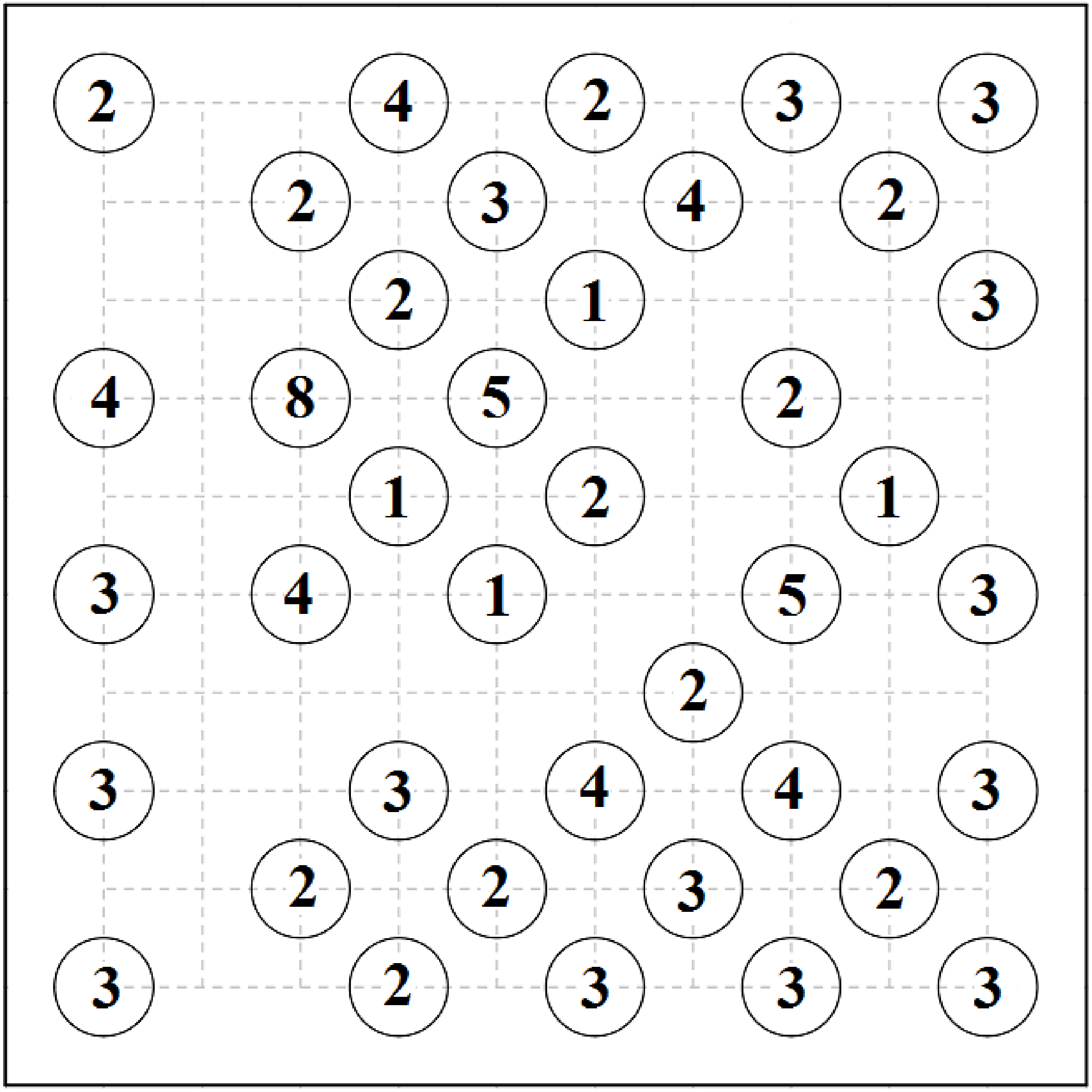
* * * * * * *

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.

1. Soient les deux formules suivantes, où les lettres sont toutes des variables propositionnelles.
   – F_1 :$\neg(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee \neg C)$;
   – F_2 :$((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow (\neg C \wedge (B \Rightarrow C))$.

   (a) Écrire leur table de vérité.
   (b) Préciser si ce sont des tautologies.
   (c) Donner l'écriture polonaise de F_1.
   (d) Donner la forme normale disjonctive de F_1.
   (e) Donner la forme normale conjonctive de F_2.
2. Jeu des ponts. Chaque cercle représente une île. Le chiffre à l'intérieur du cercle indique le nombre de lignes (ponts) qui passent sur cette île. Les ponts qui relient les îles voisines ne sont que des traits horizontaux et verticaux. Les îles peuvent être reliées avec des lignes simples ou doubles. Au final, toutes les îles sont reliées les unes aux autres. Des intersections, des ponts diagonaux et des liaisons avec plus de deux lignes sont prohibées. Relier les îles entre elles sous ces contraintes.



*   *   *   *   *   *   *