JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité académique 2014 **OS Physique - Applications des mathématiques**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 5 problèmes justes
Fascicule "Extraits des formulaires et tables" à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude d'une courbe paramétrée

Étudier, puis représenter (unité : 2 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{t} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{1}{t(t-1)}.$$

Problème 2. Équation différentielle et algèbre linéaire

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle
$$x(1+x^2)y' + (1+x^2)y = x.$$
2. On considère un endomorphisme h de $\mathbf{R}^2$ ainsi que les vecteurs $u = (0;3)$ et $v = (1;2)$. On sait que $h(u) = (-6;3)$ et $h(v) = (-1;7)$.
   (a) Écrire les vecteurs $e_1 = (1;0)$ et $e_2 = (0;1)$ comme combinaison linéaire des vecteurs u et v.
   (b) En déduire $h(e_1)$ et $h(e_2)$.
   (c) Justifier que $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de h relativement à la base canonique.
   (d) L'endomorphisme h est-il inversible ? Si oui, déterminer la matrice de h^{-1}.
   (e) Calculer les composantes du vecteur dont l'image par h est le vecteur $(11;14)$.
   (f) Calculer l'image par h de la droite d'équation $y = -x + 1$.

Problème 3. Analyse

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{12x}{(1+x)^3}$. On appelle C la courbe représentative de la fonction f.

1. Dans le premier quadrant, déterminer les coordonnées du maximum de f (en justifiant que c'est un maximum) ainsi que son asymptote horizontale vers $+\infty$, puis esquisser la courbe C (unité 2 cm).
2. Soit la fonction $F(x) = \dfrac{ax+b}{(1+x)^2}$. Déterminer les valeurs de a et b pour que F soit une primitive de f.
3. Dans le premier quadrant, on considère le domaine D, non borné, délimité par l'axe Ox et la courbe C. Calculer l'aire de D.
4. Dans le premier quadrant, on considère un point $A(x;0)$ et le triangle OAP, rectangle en A, où P est un point appartenant à la courbe C. Le triangle OAP détermine un cône γ par rotation autour de l'axe Ox. Calculer la valeur de x qui rend le volume de γ maximum.

Suite au verso

Problème 4. Probabilités

Chaque année, à l'Épiphanie, les Lechat (le père, la mère, les deux filles), les Frelon (le père, la mère, les deux garçons et la fille) et les Mouton (le père, la mère, le garçon et la fille) se retrouvent pour manger une galette des rois. Cette galette comprend 4 fèves et elle est découpée en 13 parts de même taille. Chaque part contient au plus une fève ; chaque convive reçoit exactement une part.

1. Calculer la probabilité que le père Mouton ait une fève.
2. Calculer la probabilité que le père Mouton et la fille Frelon aient chacun une fève.
3. Calculer la probabilité qu'une seule famille ait les 4 fèves.
4. Calculer la probabilité qu'au moins un membre de la famille Mouton n'ait pas de fève.
5. Montrer que la probabilité que les 4 fèves reviennent toutes à des enfants est de $p = \dfrac{7}{143}$.
6. On considère que les familles maintiennent la tradition durant 10 ans.
   (a) Calculer la probabilité que durant cette période, les 4 fèves reviennent toutes à des enfants exactement 3 fois.
   (b) Calculer la probabilité que durant cette période, les 4 fèves reviennent toutes à des enfants exactement 3 fois et consécutivement.
7. On considère à présent que les familles maintiennent la tradition durant 15 ans.
   Combien de fèves faudrait-il mettre dans la galette pour que la probabilité que le père Mouton ait une fève durant cette période plus de 6 fois soit approximativement égale à 0.8 ?

Problème 5. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-8;3;0)$, $B(-3;5;6)$ et $C(2;1;9)$. On considère aussi la droite d : $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite n passant par le point $\Omega(-2;2;1)$ et perpendiculaire au plan (ABC).
3. Vérifier que le point $S(4;5;-5)$ appartient à la droite n.
4. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre Ω et passant par le point S.
5. Calculer l'angle aigu que forme la droite d avec le plan (ABC).
6. Déterminer les coordonnées du centre D et le rayon r du cercle d'intersection entre la sphère Σ et le plan (ABC).
7. En déduire le volume d'un cône droit inscrit dans la sphère Σ et ayant pour base le disque de centre D et de rayon r.
8. Déterminer une représentation paramétrique de la droite t tangente en S à la sphère Σ et orthogonale à la droite d.