

Maturité académique 2013

OS non scientifiques

# EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

*Temps à disposition : 4 heures*

*Note maximale (6) pour 4 problèmes justes*

*Fascicule "Extraits des formulaires et tables" à disposition*

*Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée*

## 1. Étude de fonction

Étudier (y compris la dérivée seconde) puis représenter (unité : 1 cm, format paysage) la fonction donnée par

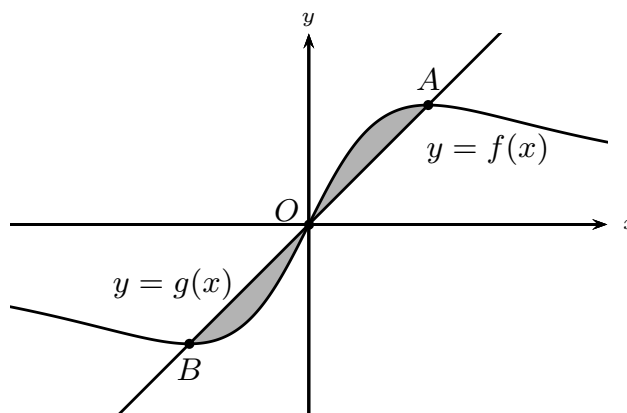
$$f(x) = (x^2 - 4) e^{-\frac{x}{2}}.$$

## 2. Analyse

Les parties A et B sont indépendantes.

A. On considère les fonctions  $f$  et  $g$  données par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  et  $g(x) = x$ , et dont les graphes sont esquissés ci-dessous.

- Déterminer les coordonnées des points  $A$  et  $B$ .
- Déterminer l'aire du domaine grisé.
- Calculer l'angle aigu d'intersection entre les graphes de  $f$  et  $g$  au point  $O$ .
- Déterminer la longueur du plus grand segment vertical que l'on peut inclure dans la surface grisée du premier quadrant.



B. On considère les fonctions  $h$  et  $u$  données par  $h(x) = \sin^2(2x)$  et  $u(x) = 2 \cdot \sin(2x) - 1$ .

- Étudier la parité des fonctions  $h(x)$  et  $u(x)$ .
- Résoudre l'équation  $h(x) = u(x)$ .
- Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{3x^2}.$$

Suite au verso

### 3. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé, on donne les points  $A(5; 10; -5)$ ,  $B(13; 12; 1)$ ,  $C(1; 7; -10)$  et  $S(1; 2; 3)$ .

On considère aussi la droite  $d : \begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = 15 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ .

3.1 Déterminer l'équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

3.2 Calculer l'angle aigu que forme la droite  $(SB)$  avec le plan  $\pi : x + 2y - 2z - 35 = 0$ .

3.3 Vérifier que la droite  $d$  est contenue dans le plan  $\pi$ .

3.4 Montrer que la projection orthogonale du point  $S$  sur le plan  $\pi$  est le point  $A$ .

3.5 Existe-t-il une sphère centrée au point  $\Omega(8; 7; 7)$  et tangente à la fois à la droite  $d$  et au plan  $\pi$ ? Si oui, donner l'équation de cette sphère; sinon, expliquer pourquoi.

On considère encore le cercle  $\Gamma$ , de centre  $A$ , de rayon  $r = \sqrt{117}$  et contenu dans le plan  $\pi$ .

3.6 Calculer la distance du point  $A$  à la droite  $d$  et en déduire le nombre de points d'intersection de la droite  $d$  avec le cercle  $\Gamma$ .

3.7 Déterminer l'équation de la sphère centrée en  $S$  et dont l'intersection avec le plan  $\pi$  est le cercle  $\Gamma$ .

### 4. Probabilités

Lorsque René le pêcheur capture un poisson, c'est une carpe 5 fois sur 10, une perche 4 fois sur 10 et un brochet 1 fois sur 10.

4.1 René capture 7 poissons. Calculer la probabilité des événements suivants.

A : Il a pêché 7 carpes.

B : Il a pêché exactement 5 carpes.

C : Il a pêché au moins 5 carpes.

D : Il a pêché 3 carpes, 3 perches et 1 brochet.

E : Il a pêché au moins deux espèces différentes.

F : Il a pêché exactement 1 brochet sachant qu'il a au moins 5 carpes.

4.2 Combien de poissons au minimum René doit-il capturer pour être sûr à plus de 99% d'avoir pêché au moins un brochet?

4.3 Comme la loi stipule que l'on doit remettre à l'eau les poissons trop petits, René doit rejeter 20% des carpes, 5% des perches et 15% des brochets qu'il a pêchés.

4.3.1 Il pêche un poisson. Calculer la probabilité qu'il doive le remettre dans l'eau.

4.3.2 Sachant que René doit rejeter le poisson pêché, calculer la probabilité que ce soit une perche.