CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Session 2012 **OS Physique - Applications des mathématiques**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 5 problèmes justes
- extrait des “Formulaires et Tables” à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

Problème 1

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les trois points $A(-10; 32; -2)$, $B(6; -16; 10)$ et $C(-2; 34; 4)$.

1.1 Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

1.2 Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et C.

1.3 Calculer l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle ABC.

1.4 Déterminer le centre et le rayon du cercle c, contenu dans le plan π, passant par les points A et C et dont le centre appartient à la droite (AB).

1.5 Déterminer les équations paramétriques de la droite t, contenue dans le plan π, tangente au cercle c en A.

On donne encore le point $S(16; 8; -20)$. On considère également le cône Γ dont le sommet est le point S et la base le cercle c.

1.6 Démontrer que le pied H de la hauteur du cône est le centre du cercle c.

1.7 Démontrer que le point $\Omega(10; 8; -12)$ appartient au segment $[HS]$.

1.8 Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection entre le cône Γ et la sphère centrée en Ω et de rayon $\sqrt{194}$.

Problème 2

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure d'espace vectoriel ainsi que de sa base canonique.

Soit ϕ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -12 & 1 & -3 \\ -20 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2.1 Dans cette première partie, on établit quelques propriétés sur l'application ϕ.

a) Montrer que $\phi \circ \phi = \phi$.

b) Calculer $\mathrm{Ker}(\phi)$.

c) L'application ϕ est-elle bijective ? Justifier.

d) Calculer les valeurs propres de ϕ, puis donner une base de vecteurs propres de ϕ et exprimer la matrice D de ϕ dans cette base de vecteurs propres.

e) On a $A = PDP^{-1}$. Préciser P et P^{-1}.

2.2 Dans cette deuxième partie, on établit quelques résultats généraux.
On appelle *projecteur* un endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $p \circ p = p$. On note Id l'identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que p est un projecteur si et seulement si $Id - p$ est un projecteur.

b) Déterminer les valeurs propres possibles d'un projecteur.

c) La composée de deux projecteurs est-elle un projecteur ? Justifier.

Problème 3

3.1 Étudier, en précisant les coordonnées des points d'intersection avec les axes, la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \ln(|t|) \qquad \text{et} \qquad y(t) = \ln(|t \cdot (t+1)|).$$

Durant l'étude, on pourra utiliser le fait que la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \ln(|t|)$ est $f'(t) = \dfrac{1}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

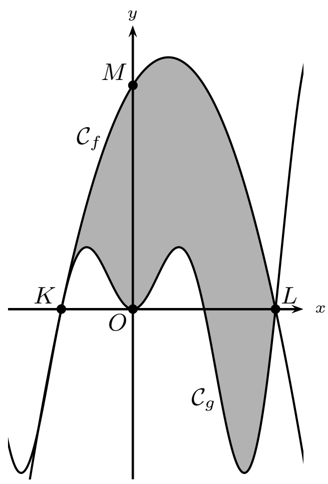
3.2 Donner l'équation de la tangente à la courbe en l'unique point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

3.3 Représenter graphiquement (unité : 2 cm) cette courbe, ainsi que la tangente obtenue ci-dessus.

Problème 4

Les deux questions sont indépendantes.

4.1 Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + \pi x + 2\pi^2$ et $g(x) = 3x \cdot \sin(x)$ dont les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, relativement à un repère orthonormé, se trouvent ci-contre.



a) Donner les coordonnées des points d'intersections K, L et M de $\mathcal{C}_f$ avec les axes.

b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tangentes en K.

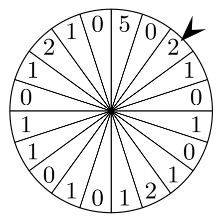
c) Calculer l'aire du domaine grisé délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

d) On appelle P un point quelconque de $\mathcal{C}_f$ situé dans le premier quadrant ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$). On appelle I sa projection orthogonale sur l'axe Ox et J sa projection orthogonale sur l'axe Oy.
Quelles sont les coordonnées du point P pour lesquelles l'aire du rectangle $PJOI$ est maximale ?

4.2 Déterminer l'équation de la courbe $\mathcal{C}$, passant par le point $A(0;1)$, telle que la pente de la tangente en chaque point $M(x;y)$ de $\mathcal{C}$ soit égale à la somme du cube de la première coordonnée de M et du produit des première et deuxième coordonnées de M.

Problème 5

À une fête foraine, une des attractions consiste en une loterie avec une roue identique à celle représentée ci-contre, divisée en vingt secteurs identiques.
Le joueur fait tourner la roue et une flèche fixe désigne un unique secteur angulaire lorsque la roue s'arrête. En achetant un jeton, on peut effectuer une partie qui consiste en lancer trois fois la roue (lancers indépendants !). Le joueur gagne l'équivalent en francs de la somme des trois nombres que la flèche aura indiqués.



5.1 Un joueur fait une partie. Calculer la probabilité des événements suivants.

a) A : ne rien gagner ;

b) B : gagner exactement CHF $5,-$;

c) C : gagner exactement CHF $4,-$ sachant que la roue s'est arrêtée au moins une fois sur le 1.

5.2 On désigne par X la variable aléatoire donnant le montant total des gains (en CHF) d'une partie.

a) Montrer que $p_2 = \mathbb{P}(X = 2) = 0.26775$;

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$;

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$. *Indication* : $X = X_1 + X_2 + X_3$, où X_i désigne le gain au i^{e} lancer ;

d) Déterminer la somme à laquelle le forain doit vendre un jeton de manière à ce que le jeu soit équilibré.

5.3 Un joueur déclare avoir fait "une bonne partie" s'il gagne au moins CHF $10,-$. Calculer le nombre de parties que le joueur devra faire pour être sûr à 99% d'avoir fait une bonne partie au moins une fois.

5.4 Un joueur joue 100 parties.
Estimer la probabilité que ce joueur a de gagner entre 20 et 30 fois (bornes comprises) CHF $2,-$.